

Transformaciones geométricas en 2D y 3D

Por Mario H Tiburcio Zúñiga

Profesor del Depto. de Sistemas y
Computación

Instituto Tecnológico de Zacatepec

Introducción

- Gráficas por computadora (Computer Graphics)

Estudia los procedimientos para producir despliegues visuales en dispositivos de salida como el monitor de una computadora.

Introducción

- Las computadoras son herramientas poderosas para producir imágenes en forma rápida y poderosa.
- No existe un área en la que no se apliquen las gráficas por computadora.

Ejemplos de aplicación de las gráficas por computadora

- CAD/CAM
- Arte
- Gráficas de presentación (informes)
- Entretenimiento (cine, juegos)
- Educación y capacitación
- Visualización de información
- Procesamiento de imágenes
- Interfaces de usuario
- Etc, etc, etc,.....

Primitivas de graficación

- Haciendo uso de primitivas de graficación como las que permiten dibujar píxeles, líneas, círculos, rectángulos, etc., se pueden crear una gran variedad de figuras y formas. Estas primitivas son los “ladrillos” en la construcción de despliegues gráficos por computadora.

Las formas y figuras gráficas se pueden alterar o manipular.

- cambiar su dimensión
- cambiar su posición
- rotarlas
- reflejarlas
- enchuecarlas

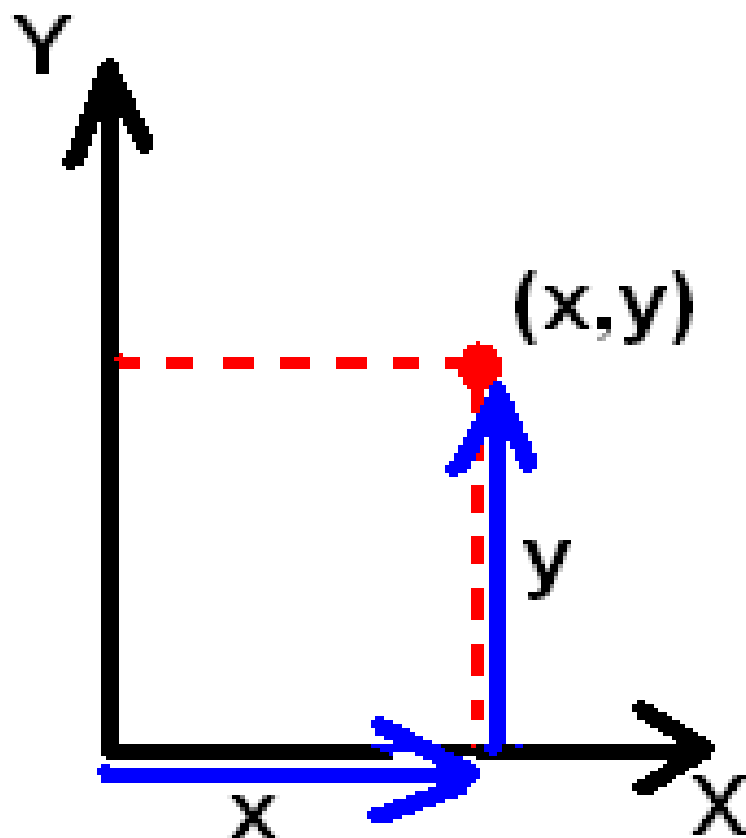
¿ Cómo se llevan a cabo estas alteraciones y manipulaciones ?

- Aplicando transformaciones geométricas a las figuras u objetos deseados.
- Una transformación geométrica altera la descripción de las coordenadas de los objetos.

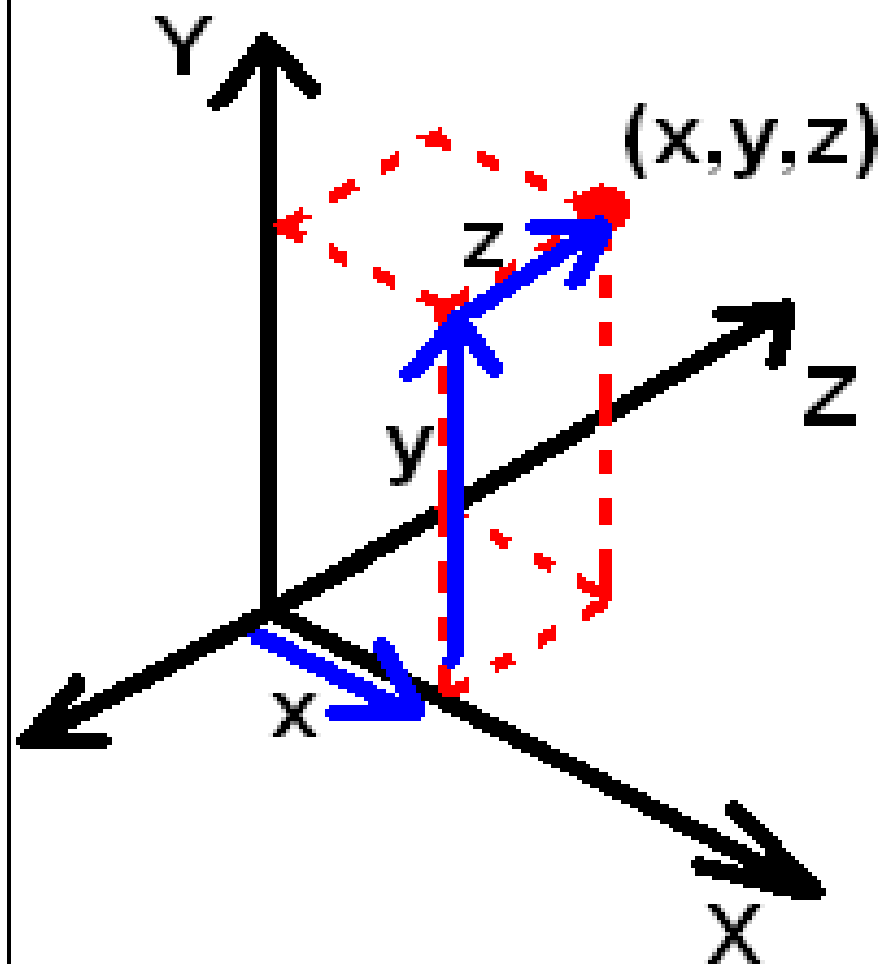
Transformación geométrica en el plano y en el espacio

- Una transformación geométrica puede aplicarse a figuras planas (2D) o a objetos en el espacio (3D).
- Si los puntos que se alteran tienen coordenadas de dos componentes (x,y) , la transformación es en 2D.
- Y si alteran puntos con coordenadas (x,y,z) , la transformación es en 3D.

Coordenada en 2D



Coordenada en 3D



Objetivo

Mostrar cómo realizar transformaciones geométricas básicas a objetos en 2D y 3D.

Transformaciones geométricas básicas en 2D

- Escalación
- Traslación
- Rotación
- Reflexión respecto eje X y Y

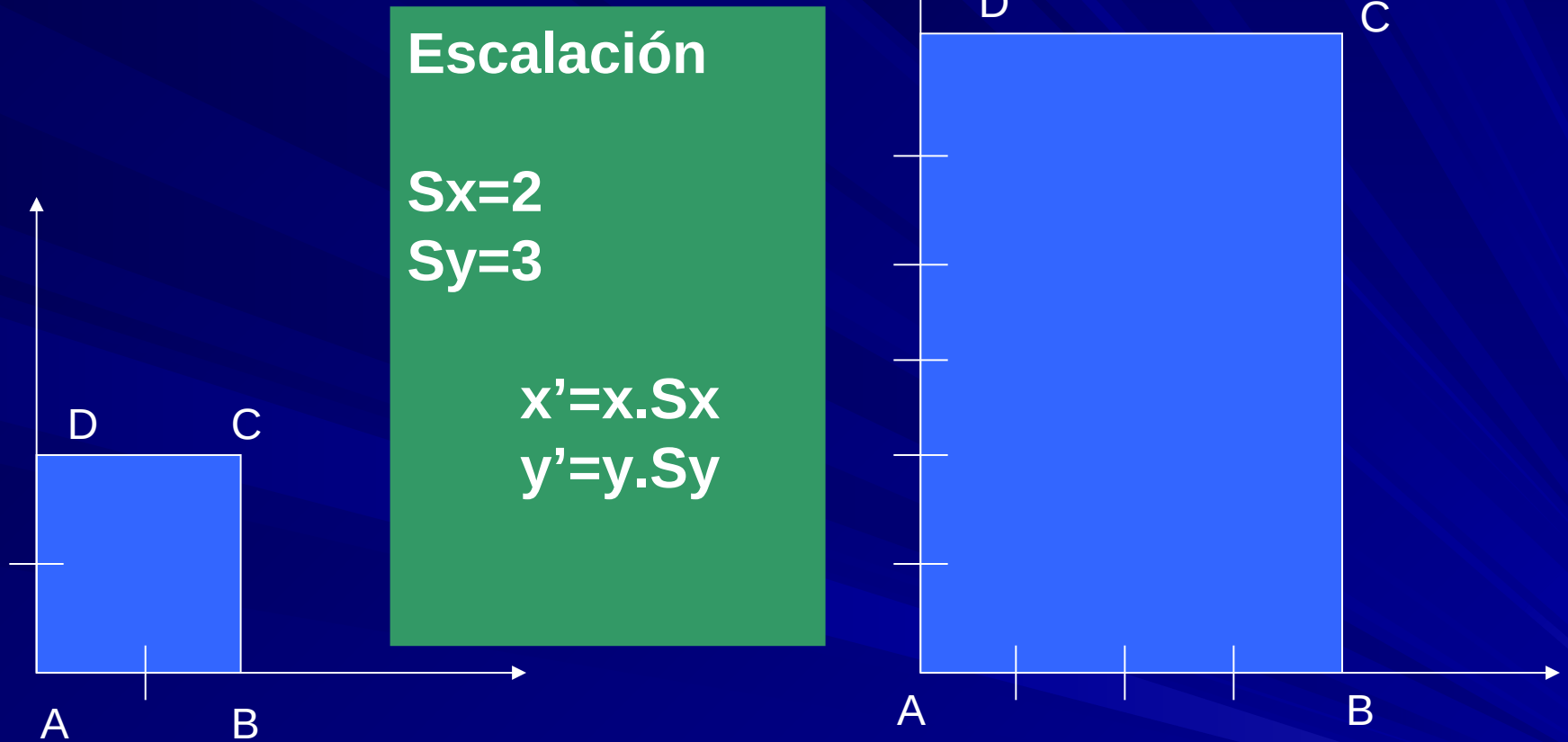
Transformaciones geométricas básicas en 3D

- Escalación
- Traslación
- Rotación en torno al eje X
- Rotación en torno al eje Y
- Rotación en torno al eje Z

Procedimiento general al aplicar una transformación geométrica

- Primero se debe tener la información de las coordenadas del objeto a transformar.
- Se selecciona la transformación geométrica por realizar.
- Se aplica la transformación seleccionada a cada una de las coordenadas originales del objeto, para obtener las coordenadas modificadas del objeto.
- Se redibuja el objeto con las nuevas coordenadas, visualizándose el objeto ya modificado.

Procedimiento al aplicar una T.G.

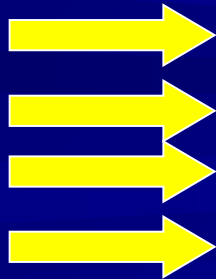


A (0,0)

B (2,0)

C (2,2)

D (0,2)



A (0,0)

B (4,0)

C (4,6)

D (0,6)

Escalación 2D

Nos permitirá cambiar las dimensiones de un objeto.

Requiere 2 parámetros:

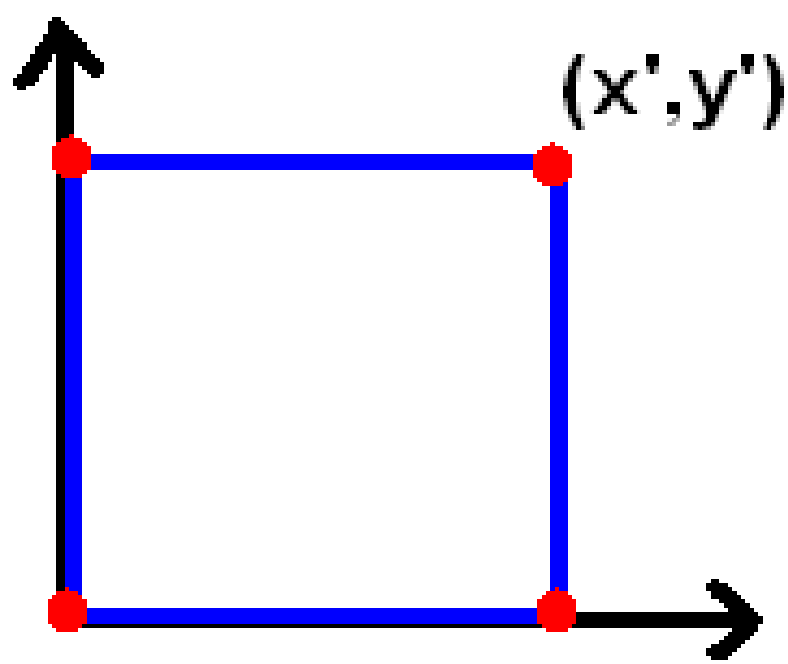
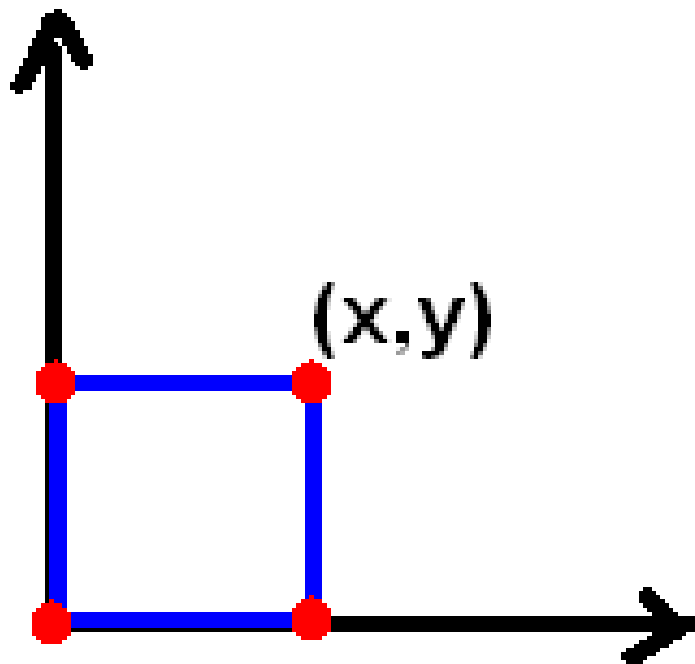
S_x = Factor de escalación en X

S_y = Factor de escalación en Y

$S_x, S_y > 1$ Aumenta la dimensión

$S_x, S_y < 1$ Disminuye la dimensión

$S_x, S_y = 1$ Se mantiene la dimensión



$(x, y) \xrightarrow{\text{T escalación}} (x', y')$

$$x' = x \cdot S_x$$

$$y' = y \cdot S_y$$

Traslación 2D

Nos permitirá cambiar la posición de un objeto, moviéndolo en línea recta desde una posición inicial a la posición final.

Requiere 2 parámetros:

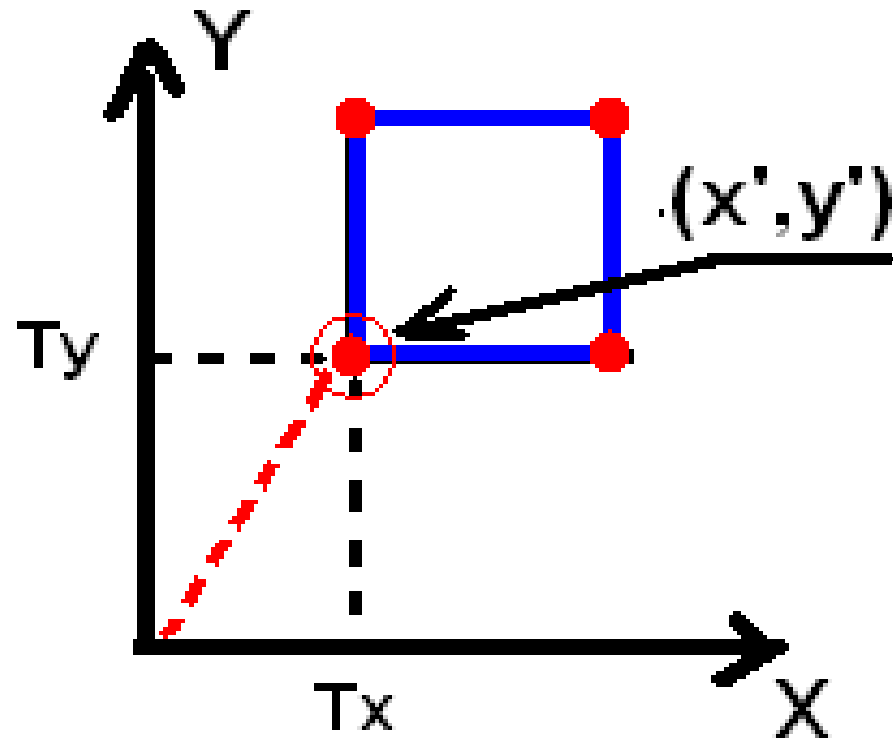
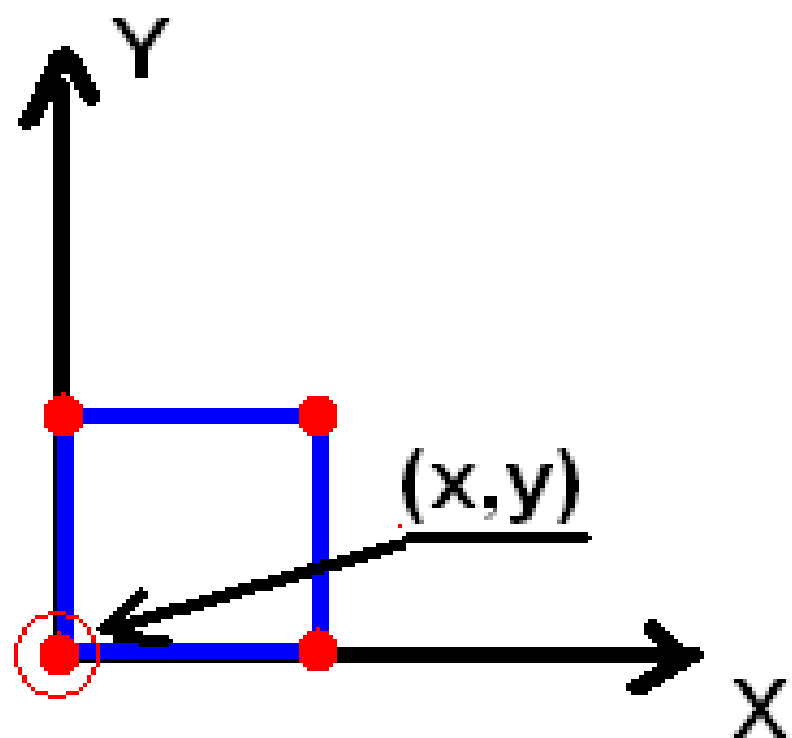
T_x = Desplazamiento en X

T_y = Desplazamiento en Y

$T_x, T_y > 0$ Desplazamiento positivo

$T_x, T_y < 0$ Desplazamiento negativo

$T_x, T_y = 0$ No hay desplazamiento



$$(x,y) \xrightarrow{\text{T Traslación}} (x',y')$$

$$x' = x + Tx$$

$$y' = y + Ty$$

Rotación 2D

Nos permite rotar o girar un objeto en torno al origen un ángulo dado

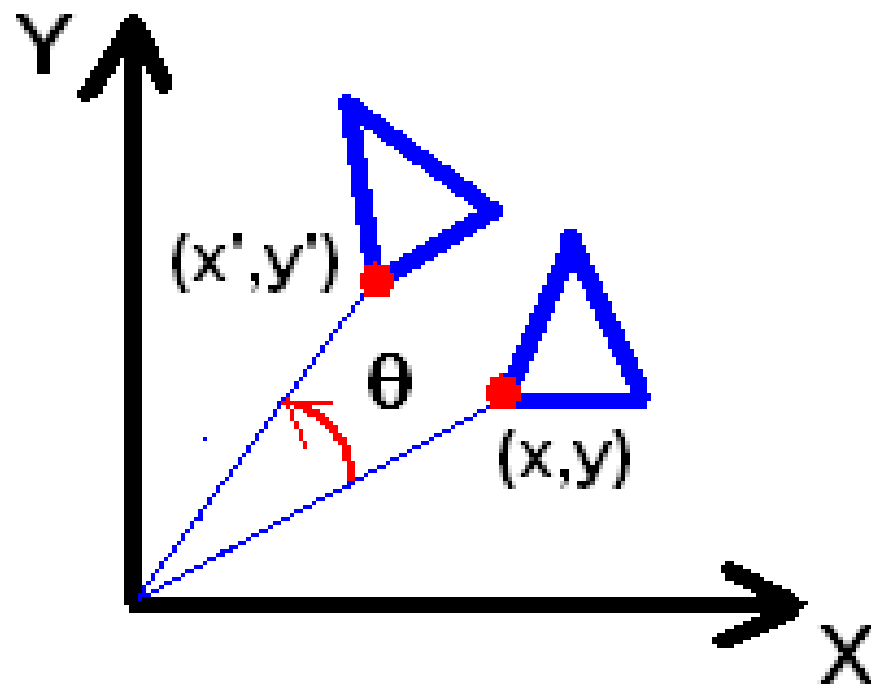
Requiere 1 parámetro:

θ = Ángulo de rotación

$\theta > 0$ Rotación contraria a sentido de las manecillas del reloj

$\theta < 0$ Rotación en el sentido de las manecillas del reloj

$\theta = 0$ Sin rotación



$$(x, y) \xrightarrow[\theta]{T \text{ Rotación}} (x', y')$$

$$x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta$$

$$y' = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

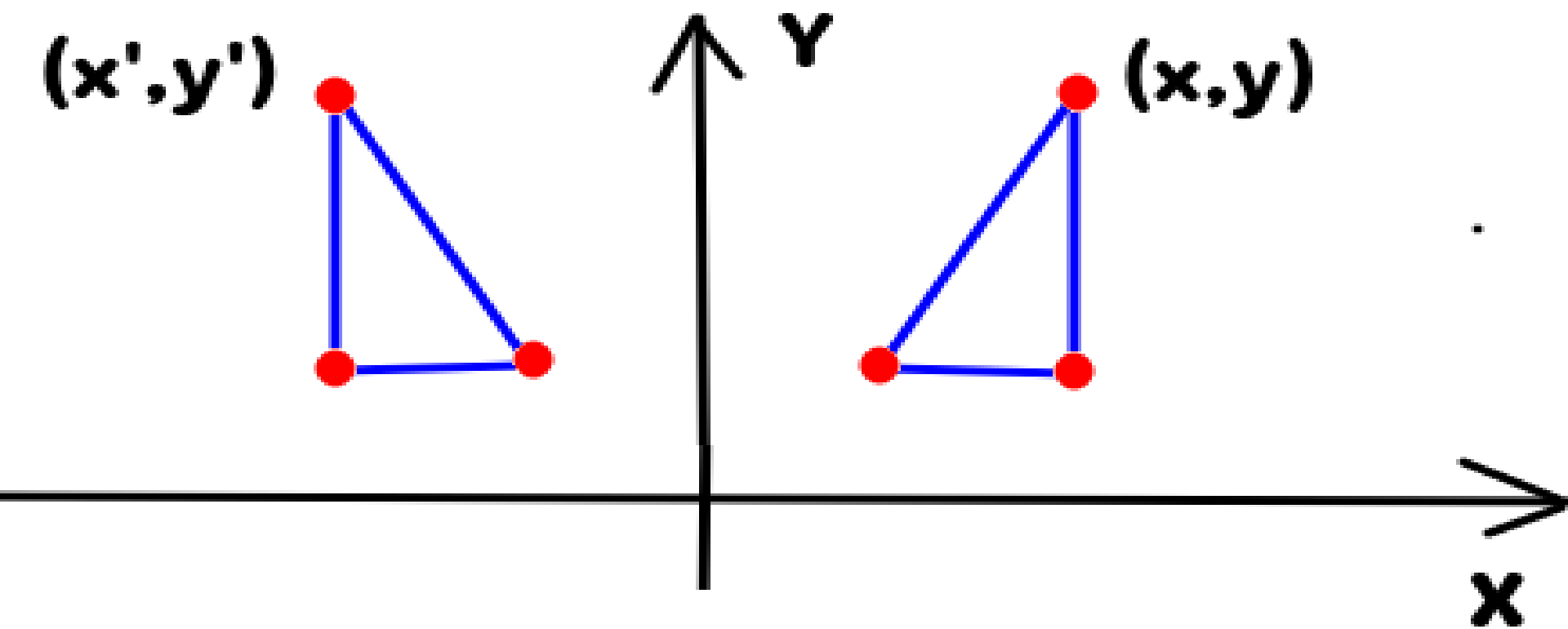
Reflexión

Nos permitirá reflejar un objeto respecto a un eje.

Requiere modificación de signos:

Si la reflexión es respecto al eje X se invierte el signo del valor de “y” en todos los puntos.

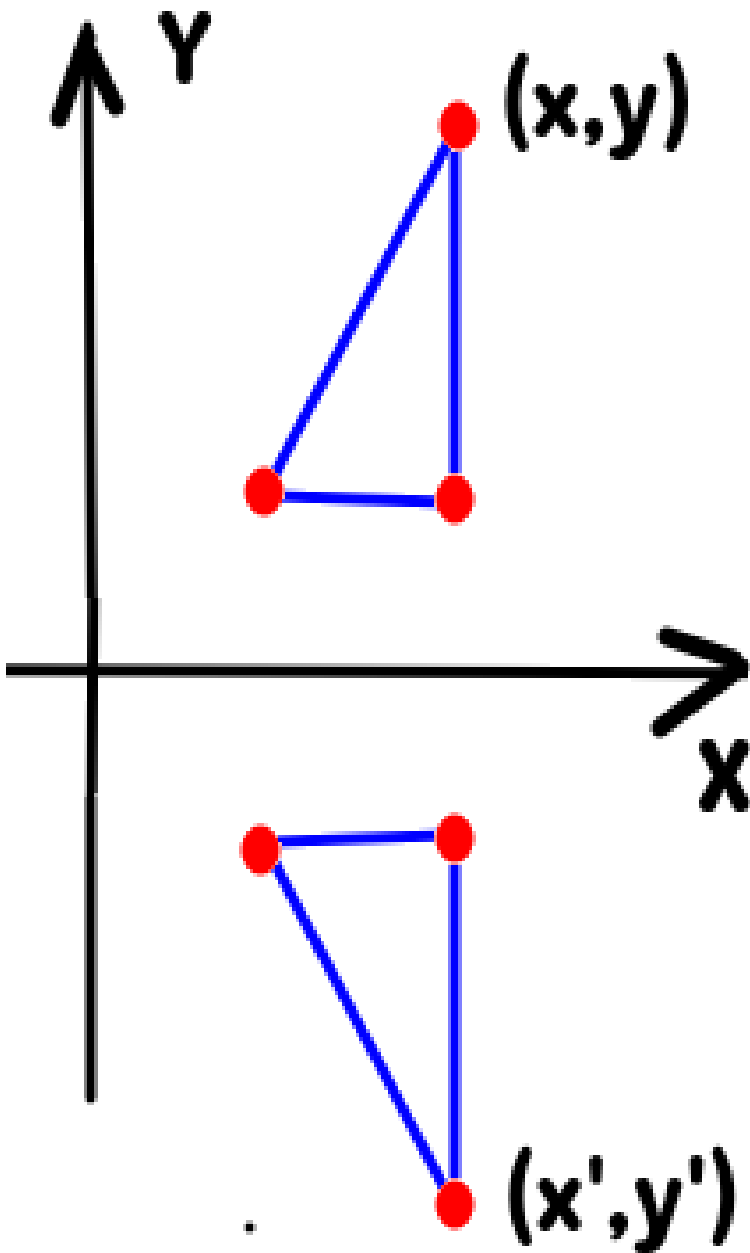
Si la reflexión es respecto al eje Y se invierte el signo del valor de “x” en todos los puntos.



$(x, y) \xrightarrow{\text{T Reflexion } Y} (x', y')$

$$x' = -x$$

$$y' = y$$



$(x, y) \xrightarrow{\text{T Reflexión X}} (x', y')$

$x' = x$

$y' = -y$

Escalación 3D

Nos permitirá cambiar las dimensiones de un objeto.

Requiere 3 parámetros:

S_x = Factor de escalación en X

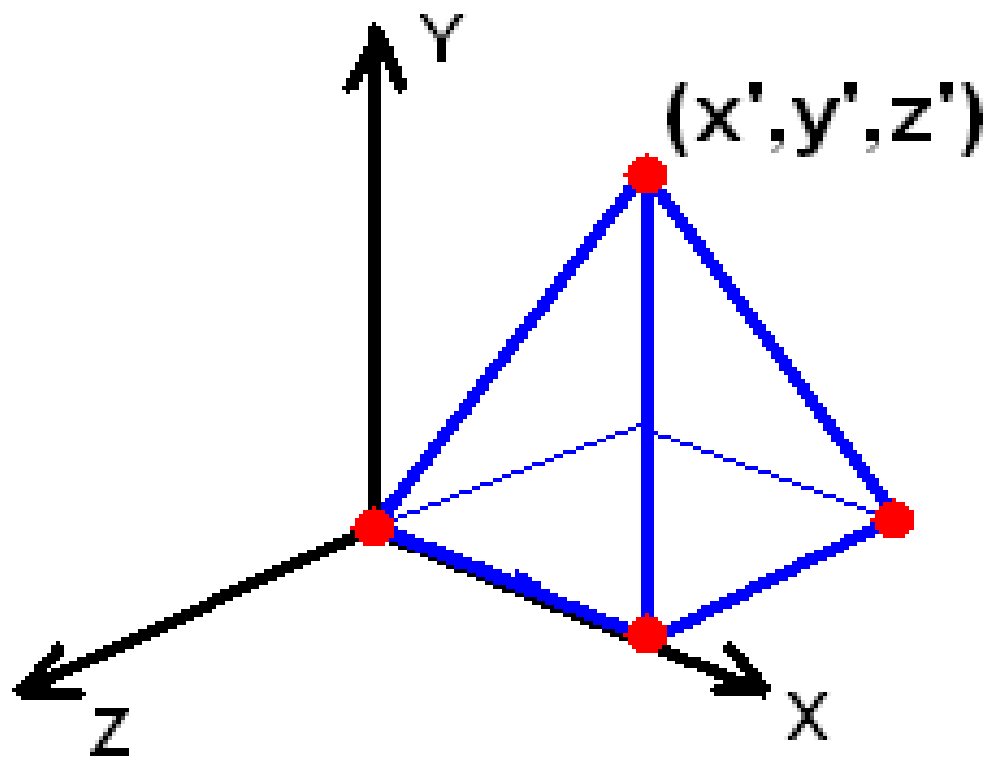
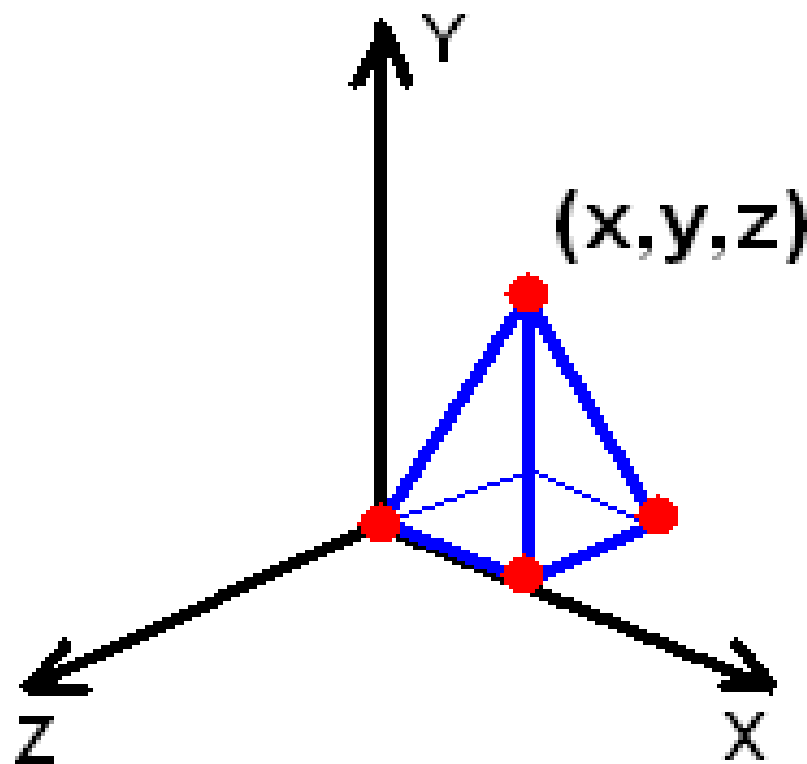
S_y = Factor de escalación en Y

S_z = Factor de escalación en Z

$S_x, S_y, S_z > 1$ Aumenta la dimensión

$S_x, S_y, S_z < 1$ Disminuye la dimensión

$S_x, S_y, S_z = 1$ Se mantiene la dimensión



(x, y, z) $\xrightarrow{\text{T Escalación}}$ (x', y', z')

$$x' = x \cdot S_x$$

$$y' = y \cdot S_y$$

$$z' = z \cdot S_z$$

Traslación 3D

Nos permitirá cambiar la posición de un objeto, moviéndolo en línea recta desde una posición inicial a la posición final.

Requiere 3 parámetros:

T_x = Desplazamiento en X

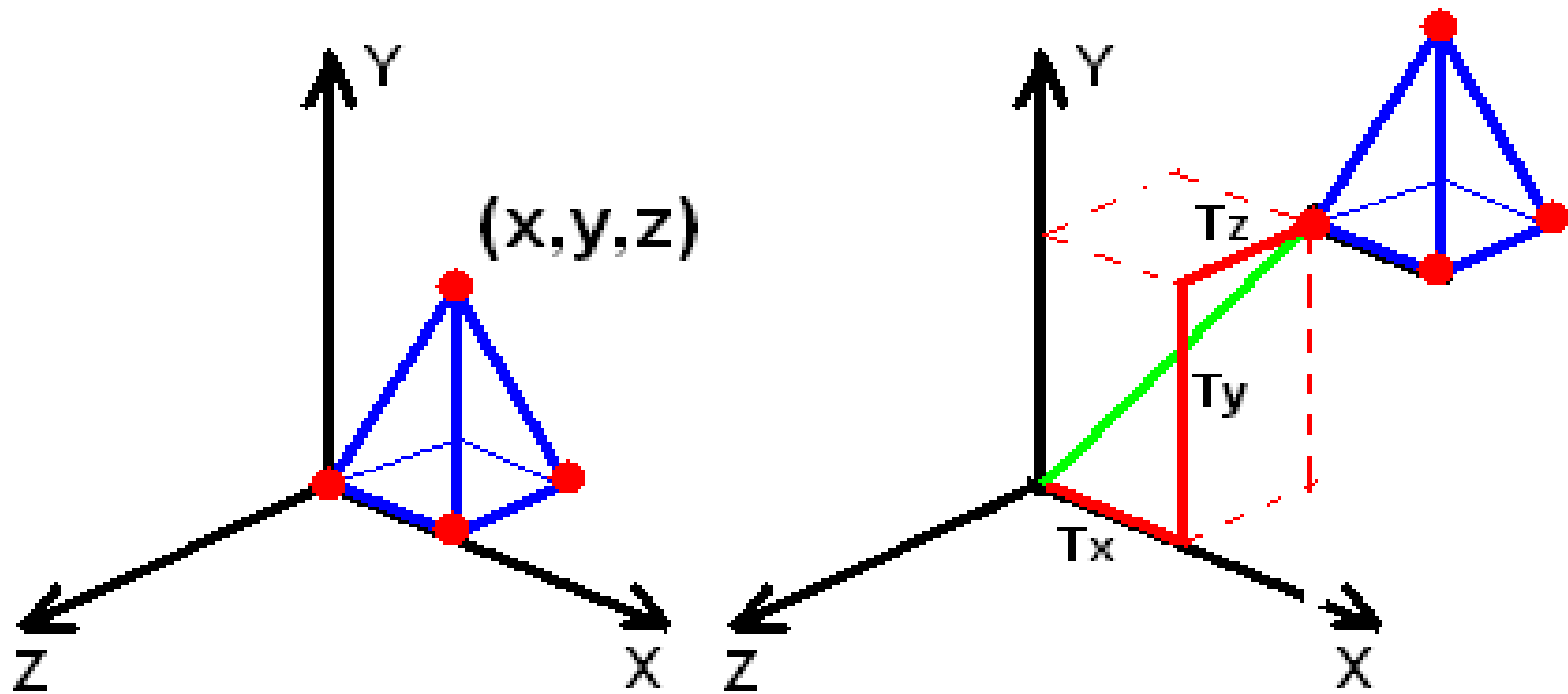
T_y = Desplazamiento en Y

T_z = Desplazamiento en Z

$T_x, T_y, T_z > 0$ Desplazamiento positivo

$T_x, T_y, T_z < 0$ Desplazamiento negativo

$T_x, T_y, T_z = 0$ No hay desplazamiento



$$(x, y, z) \xrightarrow{\text{T Traslación}} (x', y', z')$$

$$x' = x + T_x$$

$$y' = y + T_y$$

$$z' = z + T_z$$

Rotación 3D en torno al eje X

Nos permite rotar o girar un objeto en torno al eje X un ángulo dado

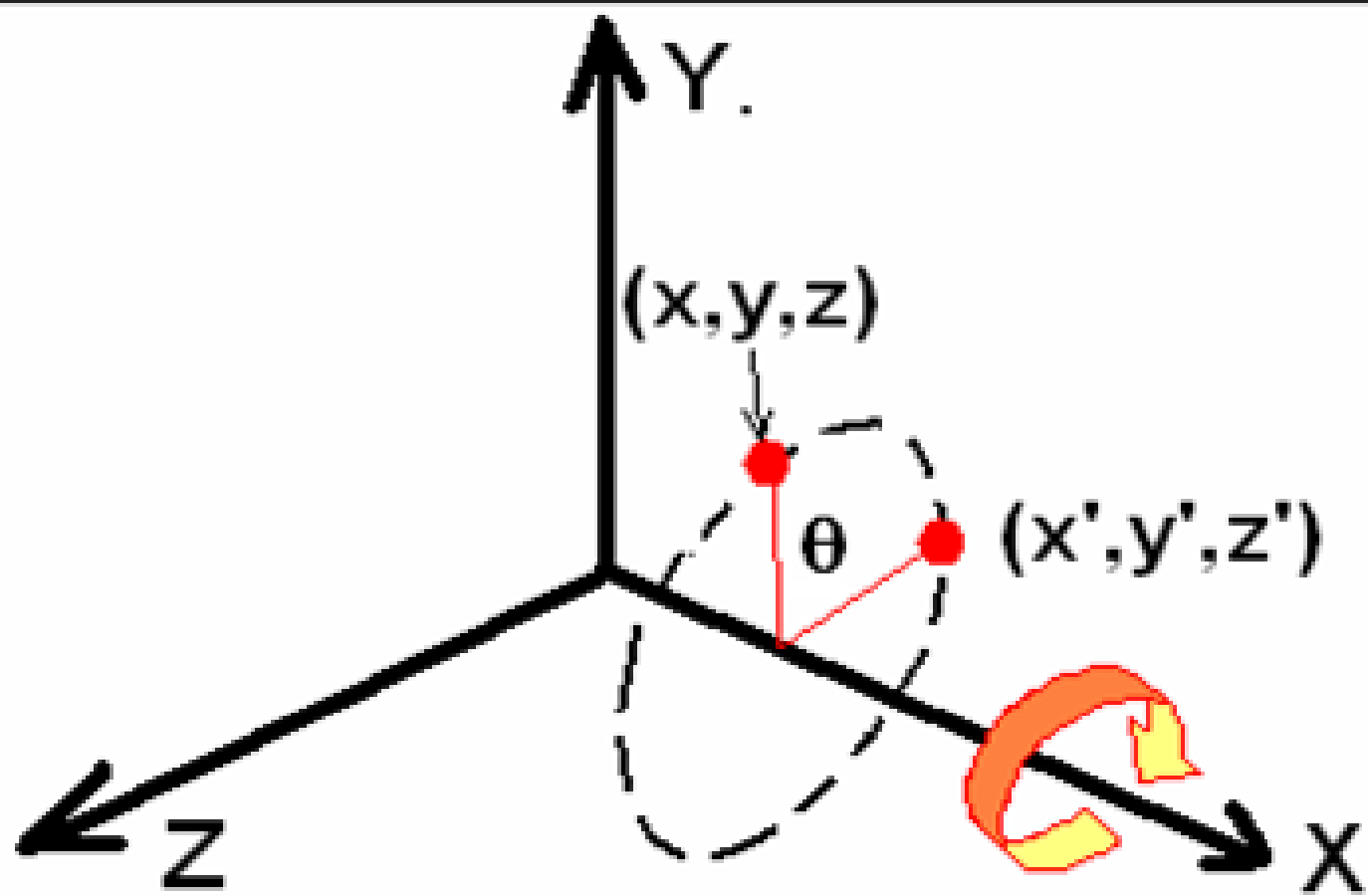
Requiere 1 parámetro:

θ = Ángulo de rotación

$\theta > 0$ Rotación contraria a sentido de las manecillas del reloj

$\theta < 0$ Rotación en el sentido de las manecillas del reloj

$\theta = 0$ Sin rotación

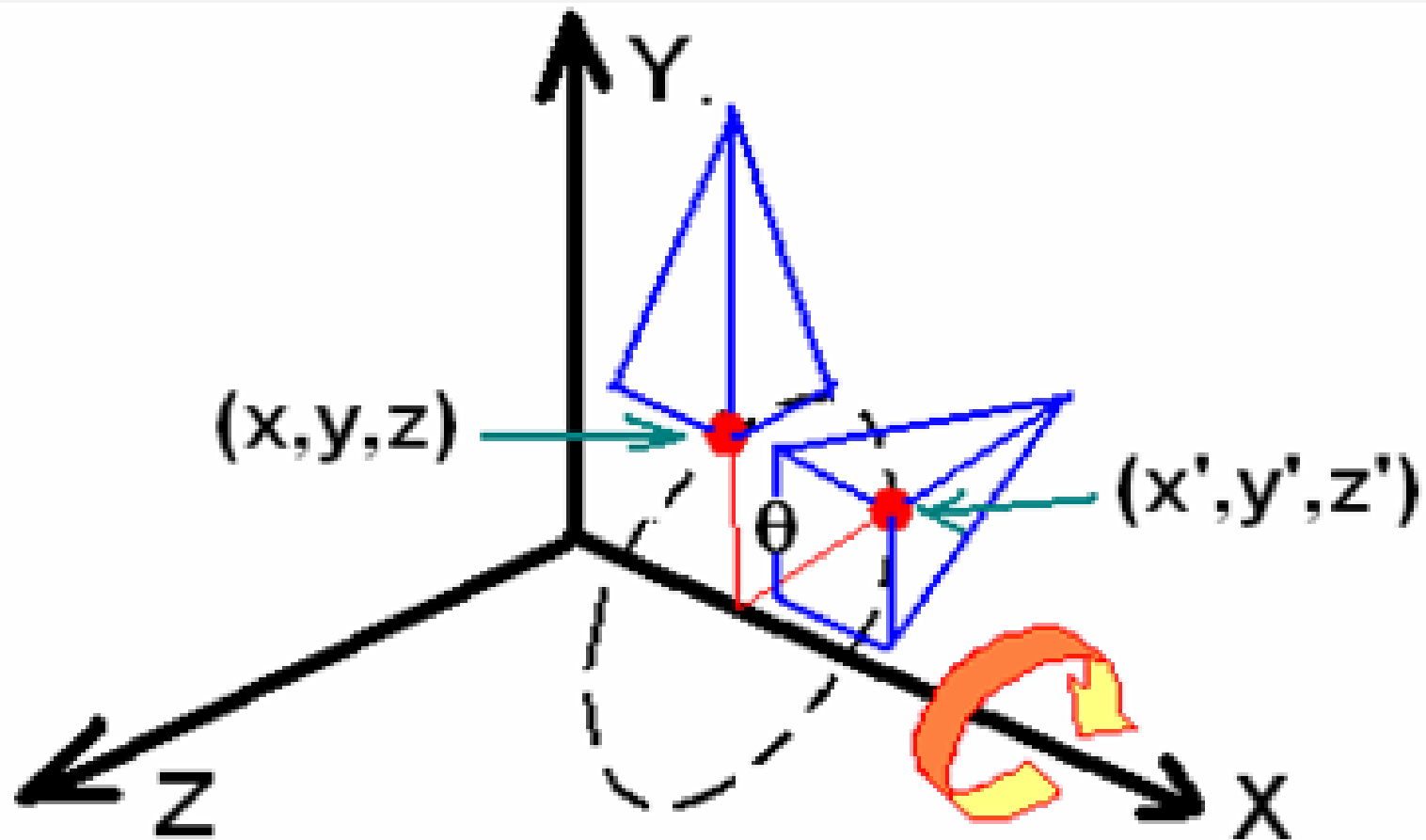


$(x, y, z) \xrightarrow{\text{T Rotación X}} (x', y', z')$

$$y = y \cdot \text{Cos } \theta - z \cdot \text{Sen } \theta$$

$$x = x'$$

$$z = y \cdot \text{Sen } \theta + z \cdot \text{Cos } \theta$$



$(x, y, z) \xrightarrow{\text{T Rotación X}} (x', y', z')$

$$y = y \cdot \text{Cos } \theta - z \cdot \text{Sen } \theta$$

$$x = x'$$

$$z = y \cdot \text{Sen } \theta + z \cdot \text{Cos } \theta$$

Rotación 3D en torno al eje Y

Nos permite rotar o girar un objeto en torno al eje Y un ángulo dado

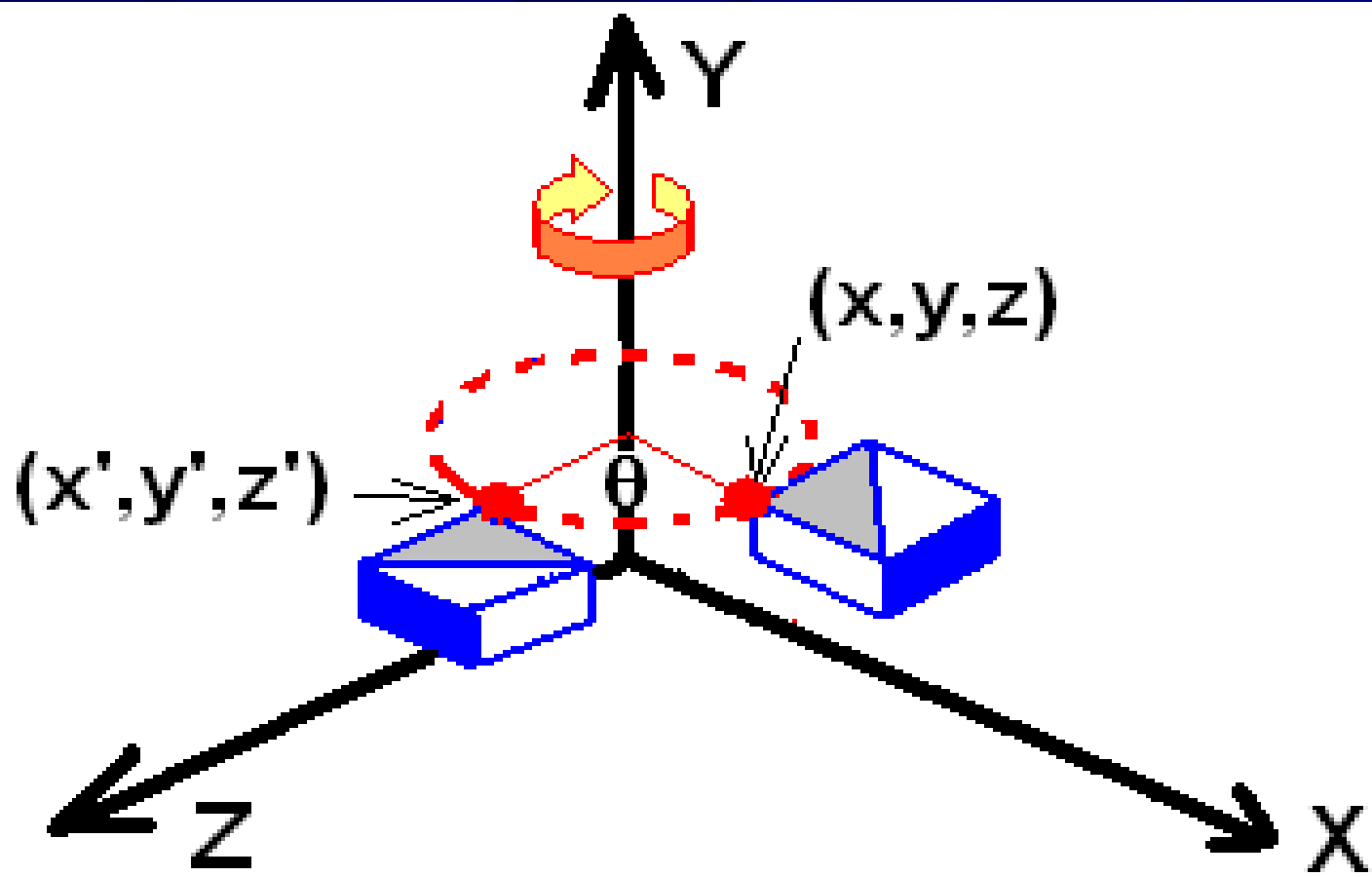
Requiere 1 parámetro:

θ = Ángulo de rotación

$\theta > 0$ Rotación contraria a sentido de las manecillas del reloj

$\theta < 0$ Rotación en el sentido de las manecillas del reloj

$\theta = 0$ Sin rotación



$(x, y, z) \xrightarrow{\text{T Rotación } Y} (x', y', z')$

$$z' = z \cdot \cos \theta - x \cdot \text{sen} \theta$$

$$x' = z \cdot \text{sen} \theta + x \cdot \cos \theta$$

$$y' = y$$

Rotación 3D en torno al eje Z

Nos permite rotar o girar un objeto en torno al eje Z un ángulo dado

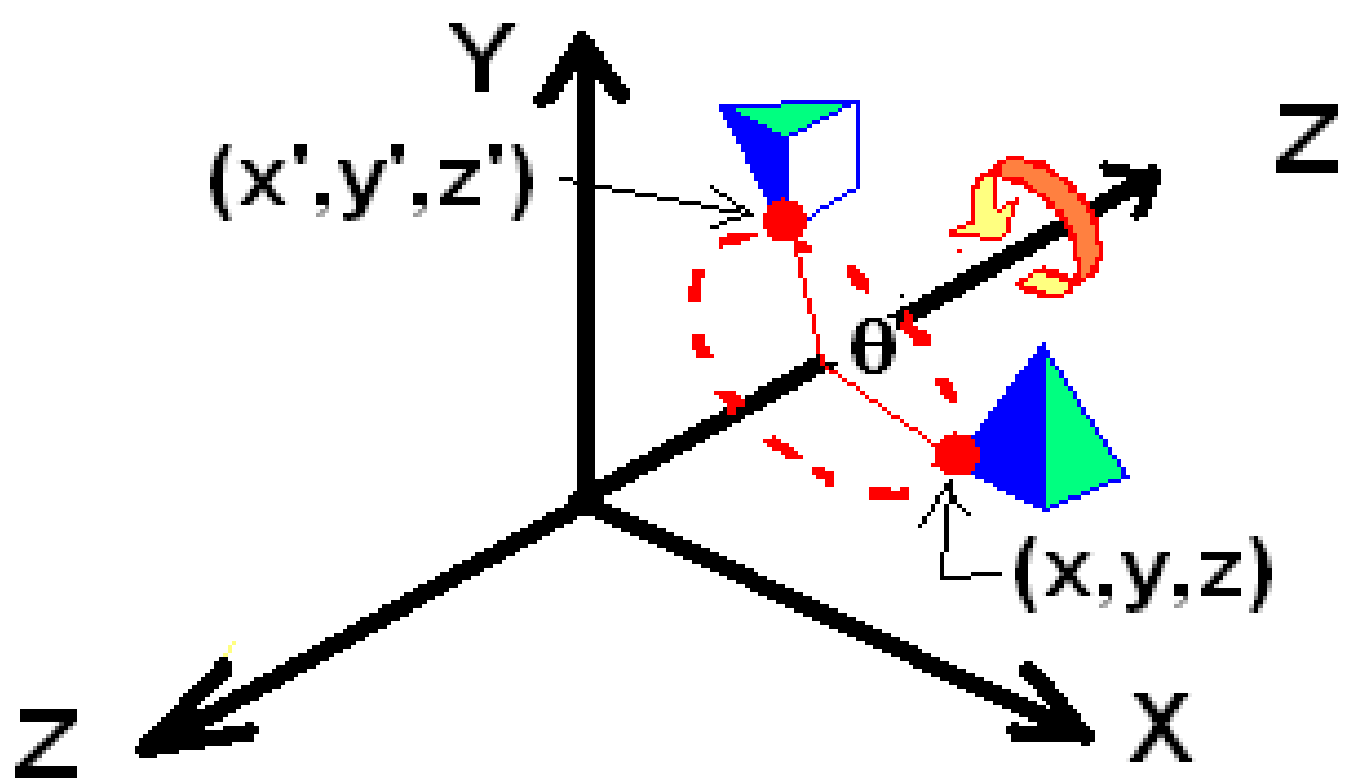
Requiere 1 parámetro:

θ = Ángulo de rotación

$\theta > 0$ Rotación contraria a sentido de las manecillas del reloj

$\theta < 0$ Rotación en el sentido de las manecillas del reloj

$\theta = 0$ Sin rotación



$(x, y, z) \xrightarrow{\text{Rotación } Z} (x', y', z')$

$$x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \text{sen} \theta$$

$$y' = x \cdot \text{sen} \theta + y \cdot \cos \theta$$

$$z' = z$$

Reflexión 3D respecto a los planos XY , YZ y XZ

Refleja un objeto respecto a un plano, como si el plano se tratara de un espejo.

Se requiere un simple cambio de signo:

Reflexión respecto a XY

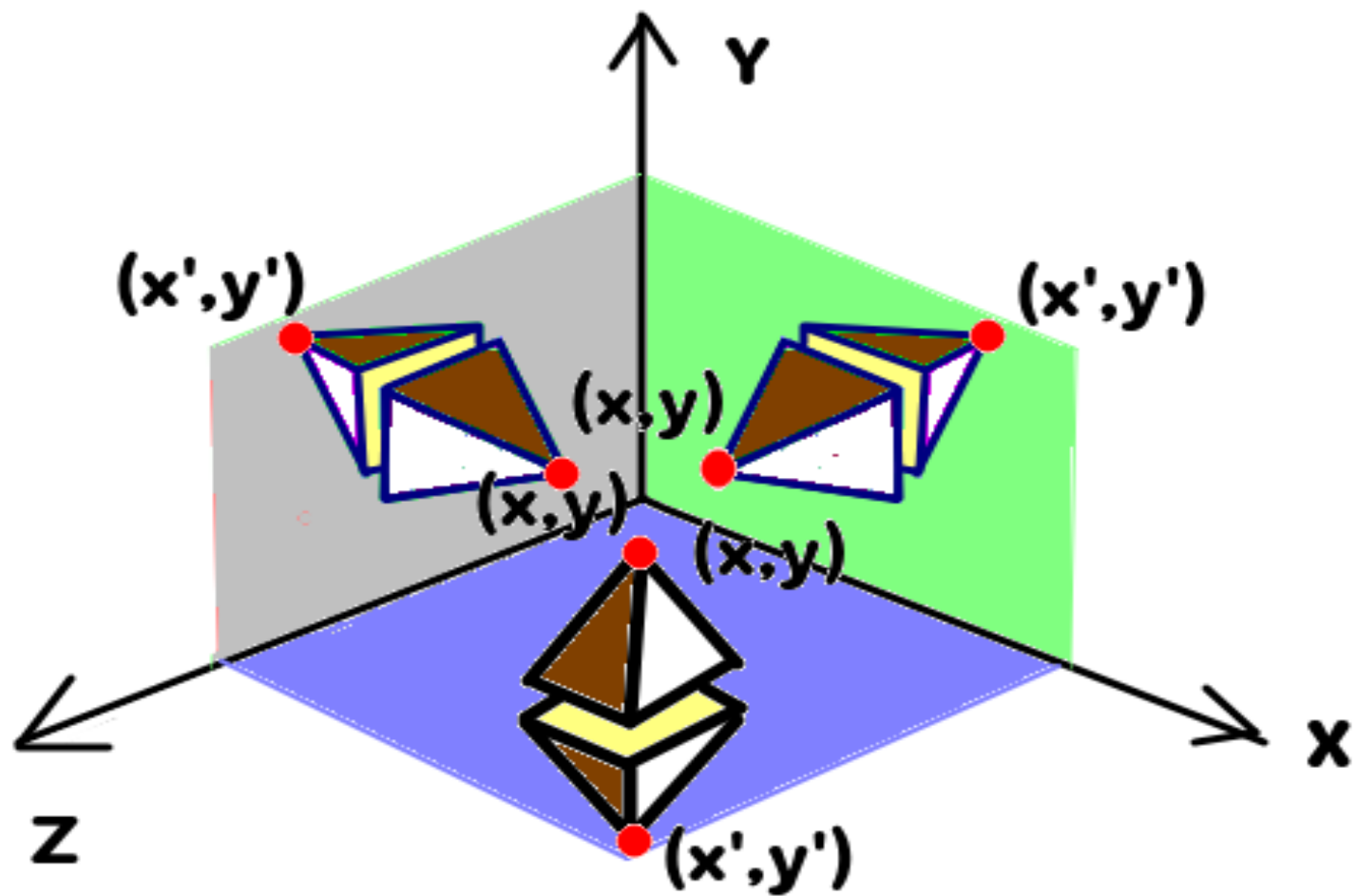
Cambia el signo del valor de “ z ”

Reflexión respecto a YZ

Cambia el signo del valor de “ x ”

Reflexión respecto a XZ

Cambia el signo del valor de “ y ”



Ref XY

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = -z$$

Ref XZ

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

$$z' = z$$

Ref YZ

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Representación matricial de transformaciones geométricas

- Facilita el cómputo de las transformaciones a simples multiplicaciones matriciales.
- Se requiere representar las coordenadas en forma homogéna.

(x,y) se representa como $(x,y,1)$

(x,y,z) se representa como $(x,y,z,1)$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Escalación 2D

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Traslación 2D

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Rotación 2D

$$(x,y,1) \begin{pmatrix} \text{Cos}\theta & \text{Sen}\theta & 0 \\ -\text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x',y',1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Reflexión respecto a X en 2D

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Reflexión respecto a Y en 2D

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Escalación 3D

$$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', z', 1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Traslación 3D

$$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{pmatrix} = (x', y', z', 1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Rotación 3D entorno a X

$$(x,y,z,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}\theta & \text{Sen}\theta & 0 \\ 0 & -\text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x',y',z',1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Rotación 3D entorno a Y

$$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', z', 1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Rotación 3D entorno a Z

$$\begin{pmatrix} (x,y,z,1) \\ (x',y',z',1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Reflexión plano XY

$$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', z', 1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Reflexión plano XZ

$$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', z', 1)$$

Representación matricial de las transformaciones geométricas

■ Reflexión plano YZ

$$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', z', 1)$$

Combinación de transformaciones geométricas.

- Se logra multiplicando las matrices correspondientes a las transformaciones geométricas a combinar, obteniéndose una matriz compuesta.

Combinación de transformaciones geométricas.

- Ejemplo: Escalar un objeto al doble en X y al triple en Y, rotarlo 45 grados y trasladarlo 7 unidades en X y 8 en Y, requiere la combinación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Cos } 45 & \text{Sen } 45 & 0 \\ -\text{Sen } 45 & \text{Cos } 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

DEMOSTRACIONES

<http://huasteco.tiburcio.mx>